

Función

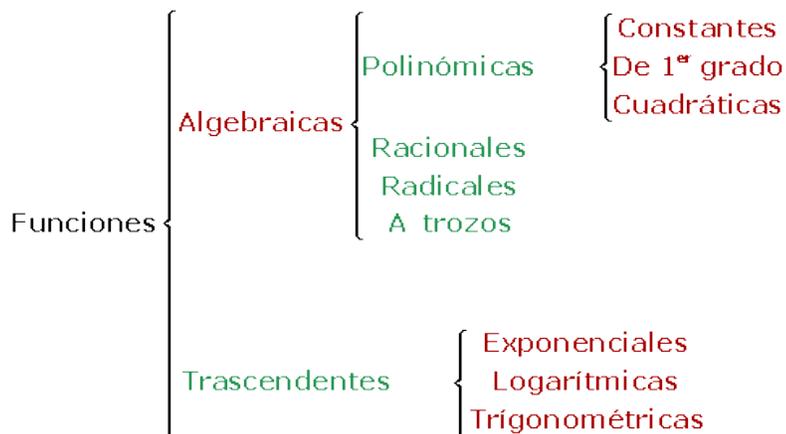
Objetivo

Comprender y manejar el concepto de Función como una relación de dependencia entre dos conjuntos, así como conocer sus ramificaciones de estudio.

Introducción

En lenguaje cotidiano o más simple, diremos que las funciones matemáticas equivalen al proceso lógico común que se expresa como “depende de”.

Mapa conceptual



Desarrollo

En matemática, una **función (f)** es una **relación** entre un conjunto dado **X** (llamado **dominio**) y otro conjunto de elementos **Y** (llamado **codominio**) de forma que a cada elemento **x** del dominio le **corresponde** un único elemento $f(x)$ del codominio (los que forman el **recorrido**, también llamado **rango** o **ámbito**).

En lenguaje cotidiano o más simple, diremos que las funciones matemáticas equivalen al proceso lógico común que se expresa como “depende de”.

Las funciones matemáticas pueden referirse a situaciones cotidianas, tales como: el costo de una llamada telefónica que depende de su duración, o el costo de enviar una encomienda que depende de su peso.

A modo de ejemplo, ¿cuál sería la regla que **relaciona** los números de la derecha con los de la izquierda en la siguiente lista?:

- 1 -----> 1
- 2 -----> 4
- 3 -----> 9

$$4 \text{ -----} \rightarrow 16$$

Los números de la derecha son los cuadrados de los de la izquierda.

La regla es entonces "elevar al cuadrado":

$$1 \text{ -----} \rightarrow 1$$

$$2 \text{ -----} \rightarrow 4$$

$$3 \text{ -----} \rightarrow 9$$

$$4 \text{ -----} \rightarrow 16$$

$$x \text{ -----} \rightarrow x^2.$$

Para referirse a esta regla podemos usar un nombre, que por lo general es la letra **f** (de función). Entonces, **f** es la regla "elevar al cuadrado el número".

Usualmente se emplean dos notaciones:

$$x \text{ -----} \rightarrow x^2 \text{ o } f(x) = x^2.$$

Así, $f(3)$ significa aplicar la regla f a 3. Al hacerlo resulta $3^2 = 9$.

Entonces $f(3) = 9$. De igual modo $f(2) = 4$, $f(4) = 16$, $f(a) = a^2$, etc.

Veamos algunos ejemplos que constituyen funciones matemáticas.

Ejemplo 1

Correspondencia entre las personas que trabajan en una oficina y su peso expresado en kilos

Conjunto X	Conjunto Y
Ángela	55
Pedro	88
Manuel	62
Adrián	88
Roberto	90

Cada persona (perteneciente al conjunto **X** o **dominio**) constituye lo que se llama la **entrada** o **variable independiente**. Cada peso (perteneciente al conjunto **Y** o **codominio**) constituye lo que se llama la **salida** o **variable dependiente**. Notemos que una misma persona no puede tener dos pesos distintos. Notemos también que es posible que dos personas diferentes tengan el mismo peso.

Ejemplo 2

Correspondencia entre el conjunto de los números reales (variable independiente) y el mismo conjunto (variable dependiente), definida por la regla "doble del número más 3".

$$x \text{ -----} \rightarrow 2x + 3 \text{ o bien } f(x) = 2x + 3$$

Algunos pares de números que se corresponden por medio de esta regla son:

Conjunto X	Conjunto Y	Desarrollo
- 2	- 1	$f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = - 1$
- 1	1	$f(-1) = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

0	3	$f(0) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$
1	5	$f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$
2	7	$f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$
3	9	$f(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$
4	11	$f(4) = 2(4) + 3 = 8 + 3 = 11$

Con estos ejemplos vamos entendiendo la noción de función: como vemos, todos y cada uno de los elementos del primer conjunto (**X**) están asociados a uno, y sólo a uno, del segundo conjunto (**Y**). Todos y cada uno significa que no puede quedar un elemento en **X** sin su correspondiente elemento en **Y**. A uno y sólo a uno significa que a un mismo elemento en **X** no le pueden corresponder dos elementos distintos en **Y**.

Ahora podemos enunciar una definición más formal:

Una función (**f**) es una regla que asigna a cada elemento **x** de un conjunto **X** (**dominio**) exactamente un elemento, llamado **f(x)**, de un conjunto **Y** (**codominio**).

Otra definición equivalente es: sean **X** e **Y** dos conjuntos. Una función de **X** en **Y** es una regla (o un método) que asigna un (y sólo uno) elemento en **Y** a cada elemento en **X**.

Usualmente **X** e **Y** son conjuntos de números.

Generalizando, si se tiene una función **f**, definida de un conjunto **A** en un conjunto **B**, se anota

f : A ----> B (o, usando **X** por **A** e **Y** por **B** **f : X ----> Y**) o **f(x) = x**

Recordemos de nuevo que el primer conjunto **A** se conoce como **dominio** (Dom) de la función y **B** es el **codominio** o conjunto de llegada.

f(x) denota la **imagen** de **x** bajo **f**, mientras que **x** es la **pre imagen** de **f(x)**.

En el ejemplo 2 anterior el número 3 es la **imagen** del número 0 bajo **f**; por su parte, 1 es la **pre imagen** del número 5.

El **rango** (Rg) o **recorrido** (Rec) o **ámbito** (**A**) es el conjunto de todos los valores posibles de **f(x)** que se obtienen cuando **x** varía en todo el dominio de la función.

Ejemplo 3

Suponga que el conjunto **A** (de salida) es $A = \{1, 2, 3\}$ y que el conjunto **B** (de llegada) es $B = \{0, 4, 6, 8, 10, 12\}$ y que la relación de dependencia o correspondencia entre **A** y **B** es "asignar a cada elemento su cuádruplo".

Vamos a examinar si esta relación es una función de **A** en **B** y determinaremos dominio y recorrido.

Veamos:

A los elementos 1, 2 y 3 del conjunto **A** les corresponden, respectivamente, los elementos 4, 8 y 12 del conjunto **B**. Como a cada elemento de **A** le corresponde un único elemento de **Y**, la relación de dependencia es una función (función de **A** en **B**).

Dominio = $\{1, 2, 3\}$ Recorrido = $\{4, 8, 12\}$

Notar que **el recorrido es un subconjunto** del codominio $B = \{0, 4, 6, 8, 10, 12\}$

Aquí debemos recordar que toda función es una **relación**, pero no todas las relaciones son funciones. Como ejemplos de relaciones que son funciones y algunas que no lo son, veamos las siguientes:

Si tenemos los conjuntos

$A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Podemos establecer las relaciones

$$f = \{ (1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 5) \}$$

$$g = \{ (1; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 5) \}$$

$$h = \{ (1; 1); (2; 2); (3; 3) \};$$

Está claro que f , g y h son relaciones de A en B , pero sólo f es una función (todos los elementos del conjunto A tiene su correspondiente elemento en b); g no es función ya que $(1; 2)$ y $(1; 3)$ repiten un elemento del dominio (el 1). Tampoco h es una función ya que $\text{Dom}(h) = \{1; 2; 3\} \neq A$ (falta el 4).

Ejemplo 4

Sea $X = \{-4, -1, 0, 4, 9\}$, $Y = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y que la regla de correspondencia es "asignar a cada elemento de X el resultado de extraer su raíz cuadrada".

Vamos a determinar si esta regla constituye función de X en Y .

Veamos:

A simple vista se aprecia que los números 0, 4, 9 tienen imagen en Y (

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$), pero a los números -4 y -1 no les corresponden elementos en Y . Como existen elementos de X que no se corresponden con elementos de Y , esta relación no es función de X en Y .

Dominio y rango de una función

Como ya vimos, el **dominio** de una función es el conjunto de valores para los cuales la función está definida; es decir, son **todos los valores que puede tomar la variable independiente (la x)**.

Por ejemplo la función $f(x) = 3x^2 - 5x$ está definida para todo número real (x puede ser cualquier número real). Así el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 2}, \quad -1 < x < 2$$

En cambio, la función tiene como dominio todos los valores de x para los cuales $-1 < x < 2$, porque aunque pueda tomar cualquier valor real diferente de -2 , en su definición determina en qué intervalo está comprendida.

Si el dominio no se especifica, debe entenderse que el dominio incluye a todos los números reales para los cuales la función tiene sentido.

En el caso de la función $h(x) = \sqrt{x + 3}$, el dominio de esta función son todos los números reales mayores o iguales a -3 , ya que $x + 3$ debe ser mayor o igual que cero para que exista la raíz cuadrada.

Como resumen, para determinar el dominio de una función, debemos considerar lo siguiente:

Si la función tiene radicales de índice par, el dominio está conformado por todos los números reales para los cuales la cantidad subradical sea mayor o igual a cero.

Si la función es un polinomio; una función de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes y n un entero no negativo), el dominio está conformado por el conjunto de todos los números reales.

Si la función es racional; esto es, si es el cociente de dos polinomios, el dominio está conformado por todos los números reales para los cuales el denominador sea diferente de cero.

El **rango (recorrido o ámbito)** es el conjunto formado por todas las imágenes; es decir, es el conjunto conformado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente; estos valores están determinados además, por el dominio de la función.

Ejemplo

Identificar dominio y rango de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$

Veamos:

Como la función tiene radicales el dominio está conformado por todos los valores para los cuales $x - 2 \geq 0$. Esto es, el dominio de la función incluye todos los reales que son mayores o iguales a 2.

El rango es igual al conjunto de los números reales positivos incluyendo el cero; puesto que al reemplazar los valores del dominio se obtienen únicamente valores positivos bajo la función f .

Visitar para más información

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/funcion_imagen_preimagen.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

<http://www.vitutor.net/1/44.html>

Resumen

A modo de recapitulación, podemos definir **función** de la siguiente manera:

Una función es una **correspondencia** entre dos conjuntos A y B no vacíos, en la cual para todo elemento que pertenece al conjunto A existe un solo elemento, y solo uno, que pertenece al conjunto B al cual se le asocia o corresponde.

Para simbolizar que se ha establecido una función f , de un conjunto A en un conjunto B, se usa la siguiente notación:

$$f : A \rightarrow B$$

Criterio de la función

En un sentido abstracto, calcular una función consiste en examinar la correspondencia general de “y” con respecto a “x”, expresado en la fórmula abstracta:

$$y = f(x)$$

Esta fórmula establece que la magnitud “y” está, de modo general, en función de “x”.

Ojo, que la magnitud “y” corresponde a lo que luego llamaremos “imagen”, y que depende del valor que se le asigne a “x” (que será la “preimagen”) en $f(x)$.

La notación $y = f(x)$ se lee “y” es una función de “x” o “y” es igual a f de x (esta notación no significa f por (x)). Obviamente en lugar de “x” e “y” hubiésemos podido emplear “variable”, y escribirlo así:

Variable dependiente = f (variable independiente)

<http://www.youtube.com/watch?v=lixFuzigJR0&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=Qqewrq7nXvU&feature=related>

Bibliografía

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/funcion_imagen_preimagen.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

<http://www.vitutor.net/1/44.html>