

Sesión 15

Traslacion y Rotacion de ejes

Objetivo

Conceptualizar los movimientos de rotación y traslación de ejes en el plano

Introducción

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados.

Rotación es el movimiento de cambio de orientación de un cuerpo o un sistema de referencia de forma que una línea (llamada *eje de rotación*) o un punto permanece fijo.

Mapa conceptual



Desarrollo

Traslación de ejes

Cambio de los ejes de referencia sin girarlos, de manera que cada eje permanece paralelo a su posición original. Una vez que el origen de un sistema de ejes x e y se cambia al punto $O'(x_0, y_0)$ en el sistema original, es necesario dar a cada punto $p(x, y)$ en el sistema original un nuevo conjunto de coordenadas $p'(x', y')$ en el nuevo sistema, de acuerdo con las siguientes relaciones:

$$x = x' + x_0$$

$$y = y' + y_0$$

El propósito de tal traslación de ejes es simplificar la ecuación de una curva para procesamiento posterior. Por ejemplo, un círculo con centro en $(1, 2)$ y un radio $r = 3$, se puede describir por medio de la siguiente ecuación:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

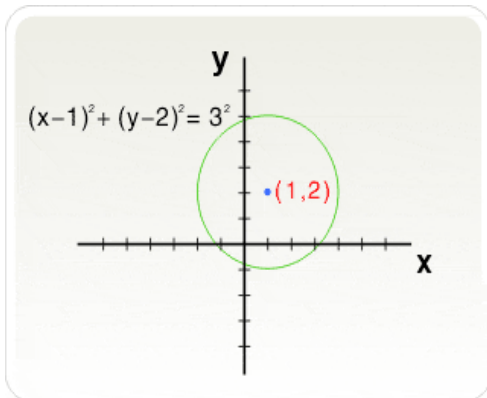
Cuando los ejes de referencia se cambian a $O'(1, 2)$, el mismo círculo se puede describir como:

$$[(x'+1) - 1]^2 + [(y'+2) - 2]^2 = 3^2$$

o

$$(x')^2 + (y')^2 = 3^2$$

Como se muestra, es definitivamente más fácil trabajar con la ecuación en el nuevo sistema.



Rotación de ejes

Cambio de la orientación de los ejes de referencia mientras se conserva el origen. La principal razón para rotar los ejes es que una ecuación dada es mucho más simple en el nuevo sistema de coordenadas que en el sistema original.

Si los ejes originales x y y rotan en sentido contrario al reloj un ángulo θ , para cualquier punto $P(x, y)$, las coordenadas originales (x, y) se convierten en las nuevas coordenadas (x', y') , que son:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

Para derivar la ecuación en las nuevas coordenadas, necesitamos expresar las coordenadas originales en las nuevas coordenadas:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

Como ejemplo de rotación, considera una ecuación simple $y = x + 21/2$, que es una línea. Si los ejes originales x e y rotan en sentido contrario al reloj un ángulo de 45° , las coordenadas originales se pueden expresar como:

$$x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ$$

$$y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ$$

Por lo tanto,

$$x = x' (21/2/2) - y' (21/2/2)$$

$$y = x' (21/2/2) + y' (21/2/2)$$

Entonces, la ecuación $y = x + 21/2$ se convierte en:

$$x' (21/2/2) + y' (21/2/2) = x' (21/2/2) - y' (21/2/2) + 21/2$$

$$y' = 1$$

En las nuevas coordenadas, la ecuación es una línea paralela al eje x' , +1 unidad separada del eje x' .

Resumen

Traslación de ejes es el cambio de los ejes de referencia sin girarlos, de manera que cada eje permanece paralelo a su posición original.

Rotación de ejes es el cambio de la orientación de los ejes de referencia mientras se conserva el origen.

<http://www.youtube.com/watch?v=xzy0XjQ3kLg>

Bibliografía

<http://www.rpd.net/mathdictionary/spanish/vmd/full/t/translationofaxes.htm>