Sesion No. 14

Hipérbola

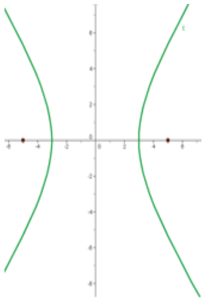
Objetivo

Definir la hipérbola como lugar geométrico, calcular su ecuación y reconocer sus elementos principales.

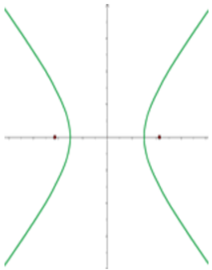
Introducción

La excentricidad mide la abertura mayor o menor de las ramas de la hipérbola.

$e = \frac{c}{a}$ $\qquad c \geq a \qquad e \geq 1$

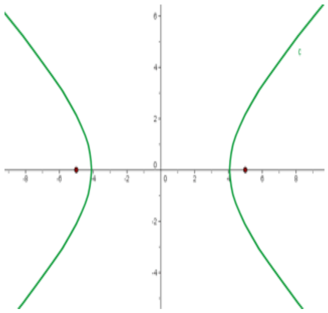


$e = \frac{5}{3}$

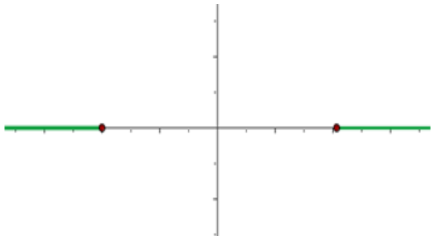


$e = \sqrt{2}$

Hipérbola equilátera

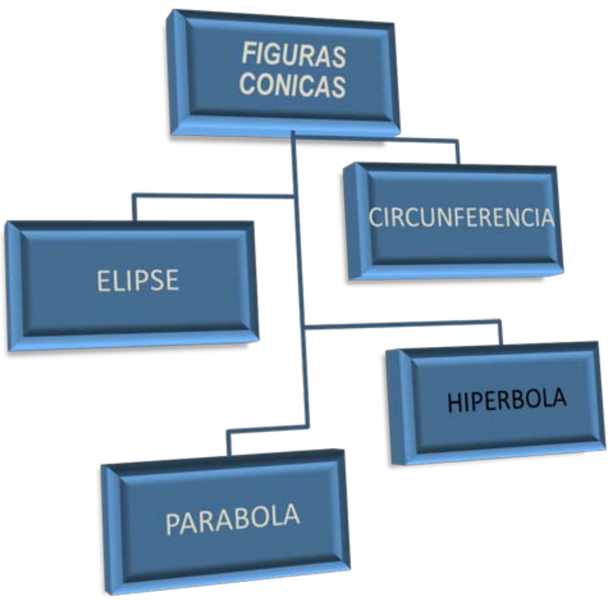


$e = \frac{5}{4}$



$e = 1$

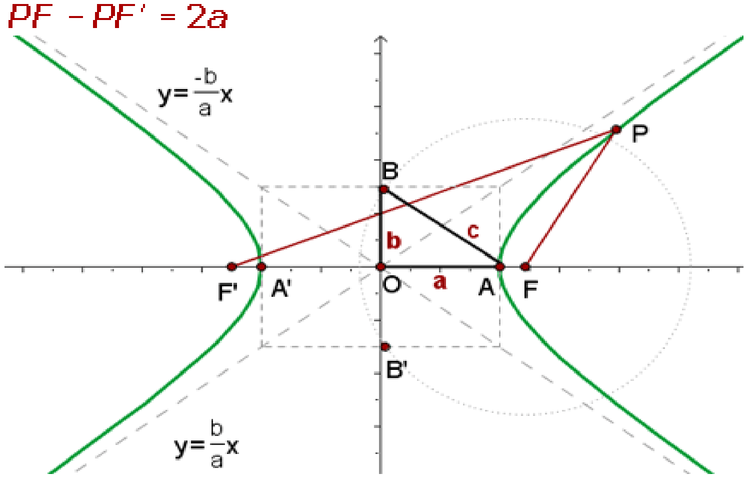
Mapa Conceptual

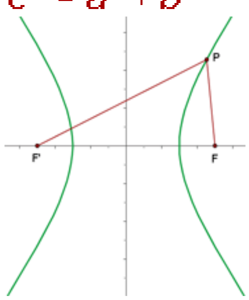


Desarrollo

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$



Elementos de la hipérbola
Focos
Son los puntos fijos F y F'.
Eje focal
Es la recta que pasa por los focos.
Eje secundario o imaginario
Es la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.
Centro
Es el punto de intersección de los ejes.
Vértices
Los puntos A y A' son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal.
Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio c.
Radios vectores
Son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF y PF'.
Distancia focal
Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud 2c.
Eje mayor
Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud 2a.
Eje menor
Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud 2b.
Ejes de simetría
Son las rectas que contienen al eje real o al eje imaginario.
Asíntotas
Son las rectas de ecuaciones: $y = -\frac{b}{a}x \,,\quad y = \frac{b}{a}x$
Relación entre los semiejes
$$c^2 = a^2 + b^2$$


Se llama ecuación reducida a la ecuación de la hipérbola cuyos ejes coinciden con los ejes coordenadas, y, por tanto, el centro de hipérbola con el origen de coordenadas.
Si el eje real está en el eje de abscisas las coordenadas de los focos son:
F'(−c,0) y F(c,0)
Cualquier punto de la hipérbola cumple:
$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$$
Esta expresión da lugar a:
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
Realizando las operaciones llegamos a:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(4, 0), de vértice A(2, 0) y de centro C(0, 0).
$$C(0,0), \qquad F(4,0), \qquad A(2,0)$$

$a = 2 \qquad c = 4 \qquad b = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Hallar la ecuación y la excentricidad de la hipérbola que tiene como focos los puntos F'(-5, 0) y F(5, 0), y 6 como diferencia de los radios vectores.

$2a = 6 \qquad a = 3$

$c = 5 \qquad b = \sqrt{25 - 9} \qquad b = 4$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad e = \frac{5}{3}$$

Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad de la hipérbola 9x2 - 16y2 = 144.

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

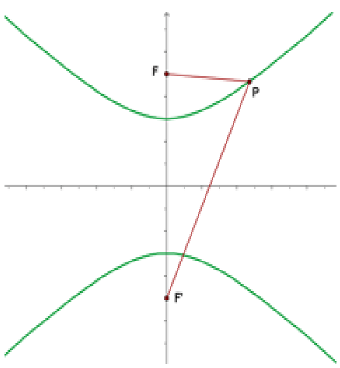
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$A(4, 0) \qquad A' = (-4, 0)$

$F = (5, 0) \qquad F' = (-5, 0)$

$y = \frac{3}{4}x \qquad y = -\frac{3}{4}x$

$e = \frac{5}{4}$



F'(0, −c) y F(0, c)

La ecuación será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

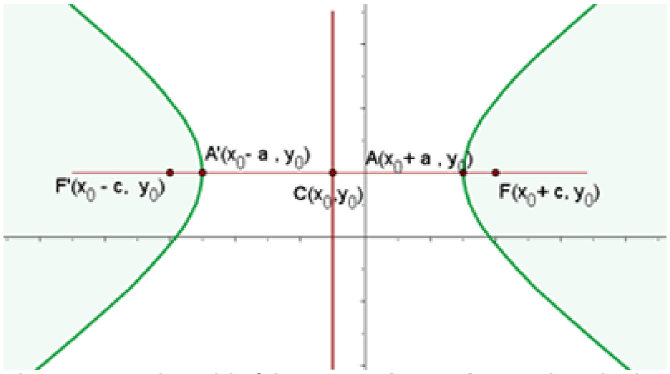
Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(0, 5), de vértice A(0, 3) y de centro C(0, 0).

$C(0, 0), \qquad F(0, 5), \qquad A(0, 3)$

$a = 3 \qquad c = 5 \qquad b = \sqrt{25 - 9} = 4$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Ecuación de la hipérbola con eje paralelo a OX, y centro distinto al origen



Si el **centro** de la hipérbola es **C(x0, y0)** y el eje principal es paralelo a OX, los **focos** tienen de coordenadas **F(x0+c, y0) y F'(x0− c, y0)**. Y la ecuación de la hipérbola será:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Donde **A y B tienen signos opuestos**.

Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(7, 2), de vértice A (5,2) y de centro C(3, 2).

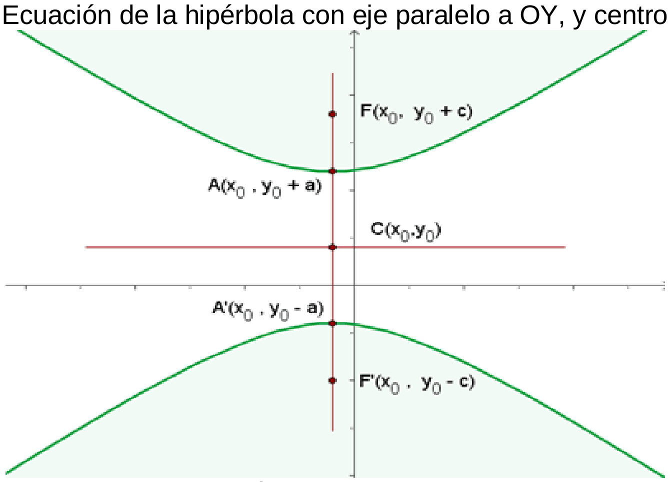
$C(3,2), \quad F(7,2), \quad A(5,2)$

$a = 5 - 3 = 2 \qquad c = 7 - 3 = 4$

$$b = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{12} = 1$$

Ecuación de la hipérbola con eje paralelo a OY, y centro distinto al origen



Si el **centro** de la hipérbola **C(x0, y0)** y el eje principal es paralelo a OY, los **focos** tienen de coordenadas **F(x0, y0+ c) y F'(x0, y0 − c)**. Y la ecuación de la hipérbola será:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Donde **A y B tienen signos opuestos**.

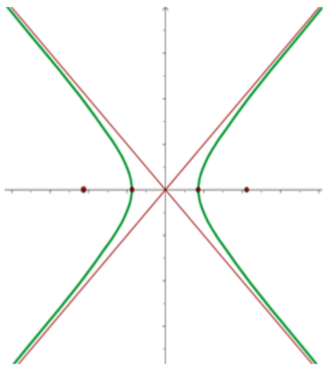
Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(-2, 5), de vértice A (-2, 3) y de centro C(-2, -5).

$C(-2, -5), \quad F(-2, 5), \quad A(-2, 3)$

$a = 3 - (-5) = 8 \qquad c = 5 - (-5) = 10$

$b = \sqrt{100 - 64} = 6$

$$\frac{(y+5)^2}{64} - \frac{(x+2)^2}{36} = 1$$



Las hipérbolas en las que los semiejes son iguales se llaman equiláteras, por tanto a = b. Y su ecuación es:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

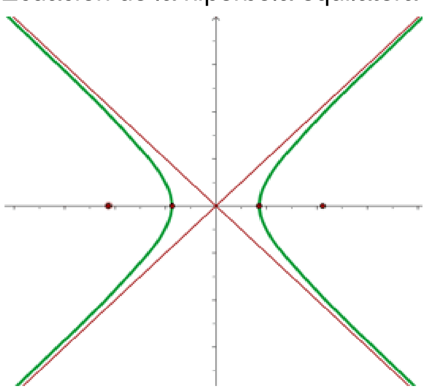
Las **asíntotas** tienen por ecuación:

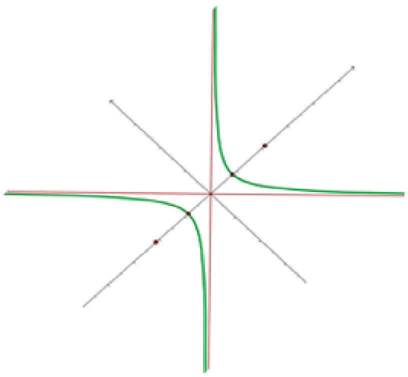
$y = x$, $y = -x$

Es decir, las **bisectrices** de los cuadrantes.

La **excentricidad** es: $e = \sqrt{2}$

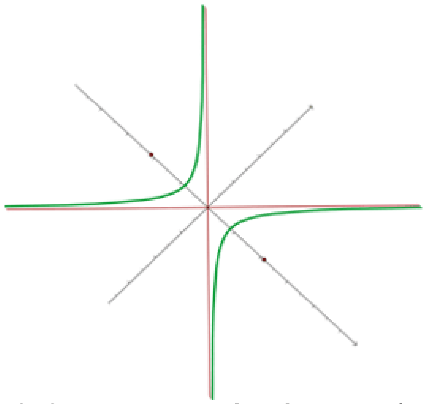
Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas





Para pasar de los ejes OX, OY a los determinados por las asíntotas, bastará dar **un giro de −45°** alrededor del origen de coordenadas. Quedando la ecuación como:

$$x \cdot y = \frac{a^2}{2} \qquad x \cdot y = k$$



Si efectuamos **un giro de 45°** en los ejes, la hipérbola que queda en el segundo y cuarto cuadrante y su ecuación será:

$x \cdot y = -k$

La ecuación $x \cdot y = 1$ representa una hipérbola equilátera, calcular sus vértices y focos.
Como las coordenadas de los vértices se encuentran en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, la primera componente y la segunda componente coinciden, es decir, x = y. Y como además el punto A pertenece a la curva, tendremos:

$x \cdot x = 1 \qquad x = \pm 1$

$A(1, 1) \qquad A'(-1, -1)$

El semieje a es la distancia del origen al vértice A

$$a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$b = a = \sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$$

El semieje c es la distancia del origen al vértice C

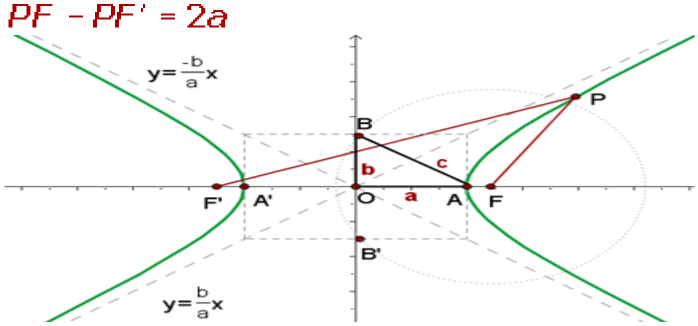
$2^2 = x^2 + y^2 \qquad x = y$

$4 = 2x^2 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

$F\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \qquad F'\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

Resumen
Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$



Elementos de la hipérbola
Focos Son los puntos fijos F y F'.
Eje focal Es la recta que pasa por los focos.
Eje secundario o imaginario Es la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.
Centro Es el punto de intersección de los ejes.

Vértices Los puntos A y A' son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal.
Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio

Radios vectores Son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF y PF'.

Distancia focal Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud 2c.

Eje mayor Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud 2a.

Eje menor Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud 2b.
Ejes de simetría Son las rectas que contienen al eje real o al eje imaginario.

Asíntotas Son las rectas de ecuaciones: $y = -\frac{b}{a}x\ ,\ \ y = \frac{b}{a}x$

Relación entre los semiejes $c^2 = a^2 + b^2$

http://www.youtube.com/watch?v=zMDjlUlArqI
http://www.youtube.com/watch?v=6jP3VRiEa-o&feature=related

Bibliografía

http://www.vitutor.com/geo/coni/h_1.html#
http://www.chapingo.mx/Prepa/matematicas/archivos_htm/geometria_analitica.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Hipérbola
http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/superior/t1-conicas/4-Hiperbola/index.html