Sesión No. 13

Elipse

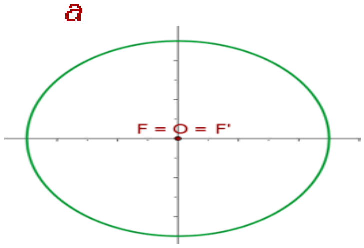
Objetivo

Identificar la ecuación de una Elipse, con eje focal paralelo a los ejes coordenados, y reconocer sus características esenciales, en los casos de Elipse con vértice fuera y en el origen.

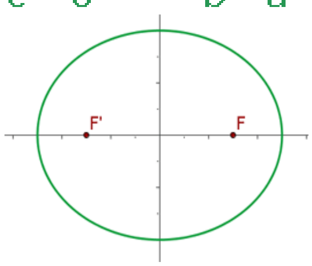
Introducción

La excentricidad de la elips es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

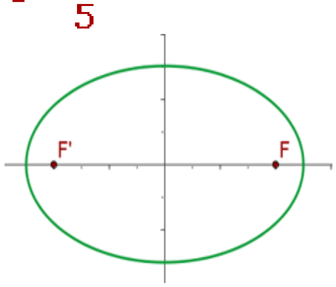
$e = \frac{c}{a}$ $\qquad c \leq a \qquad 0 \leq e \leq 1$



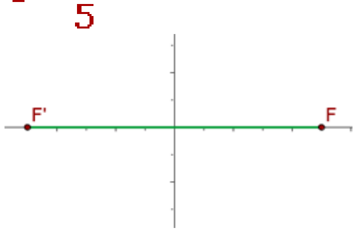
$c = 0 \qquad b = a \qquad e = 0$



$e = \frac{3}{5}$



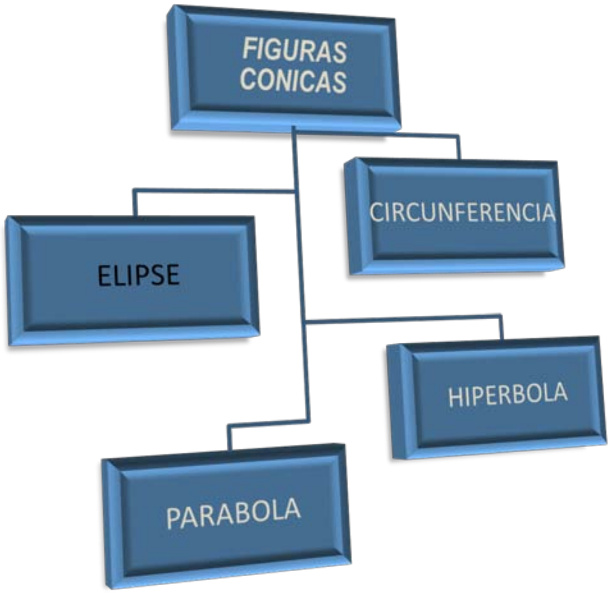
$e = \frac{4}{5}$



$c = a \qquad b = 0$

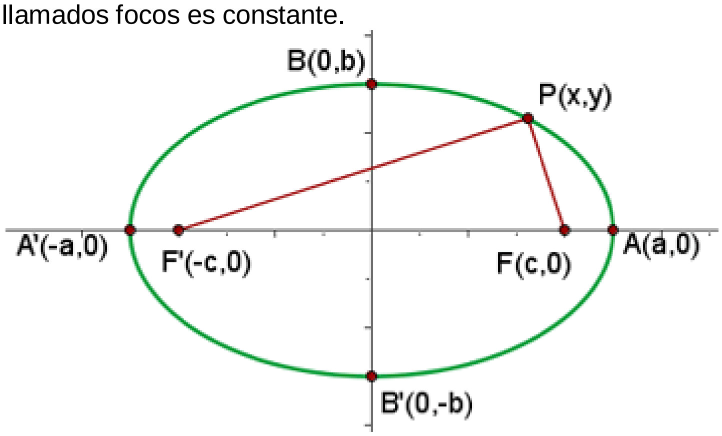
$e = 1$

Mapa Conceptual



Desarrollo

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$

Elementos de la elipse

Focos

Son los puntos fijos F y F'.

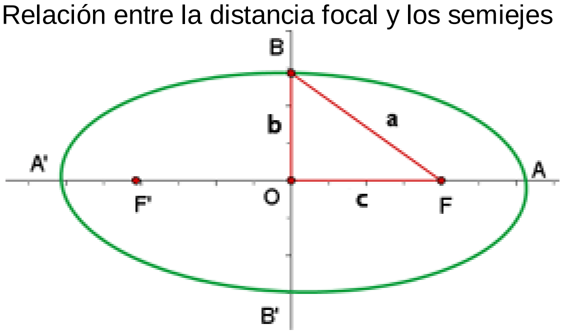
Eje focal

Es la recta que pasa por los focos.

Eje secundario

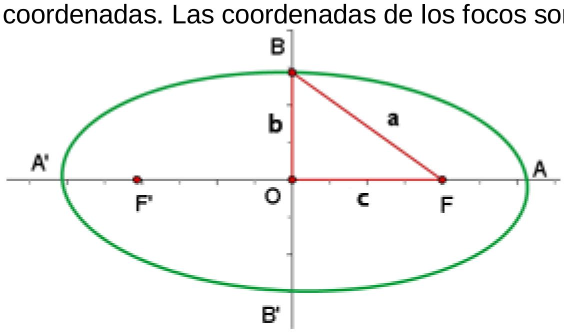
Es la mediatriz del segmento FF'.

Centro
Es el punto de intersección de los ejes.
Radios vectores
Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: PF y PF'.
Distancia focal
Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud 2c, c es el valor de la semidistancia focal.
Vértices
Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.
Eje mayor
Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud 2a, a es el valor del semieje mayor.
Eje menor
Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud 2b, b es el valor del semieje menor.
Ejes de simetría
Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.
Centro de simetría
Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.
Relación entre la distancia focal y los semiejes



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Tomamos como centro de la elipse el centro de coordenadas y los ejes de la elipse como ejes de coordenadas. Las coordenadas de los focos son:



F'(-c,0) y F(c,0)
Cualquier punto de la elipse cumple:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

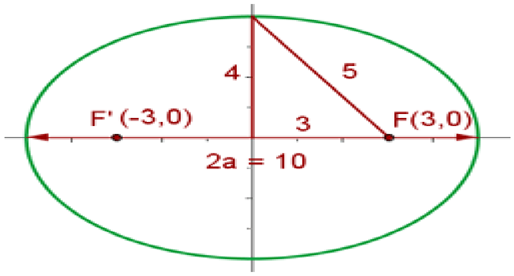
Esta expresión da lugar a:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Realizando las operaciones llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos: F'(-3,0) y F(3, 0), y su eje mayor mide 10.



Semieje mayor

$2a = 10 \qquad a = 5$

Semidistancia focal

$\overline{FF'} = 2c = 6 \qquad c = 3$

Semieje menor

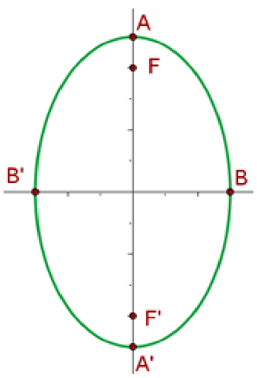
$b^2 = 25 - 9 \qquad b = 4$

Ecuación reducida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Excentricidad

$$e = \frac{3}{5}$$



Si el eje principal está en el de ordenadas se obtendrá la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Las coordenadas de los focos son:
F'(0, -c) y F(0, c)

Dada la ecuación reducida de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, hallar las coordenadas de los vértices de los focos y la excentricidad.

$a = \sqrt{9} = 3 \qquad b = \sqrt{4} = 2$

$A(0, 3) \qquad A'(0, -3)$

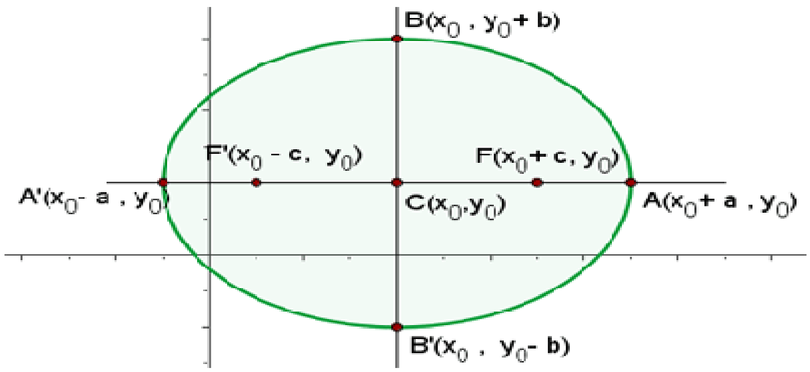
$B(2, 0) \qquad B'(-2, 0)$

$c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

$F\left(0, \sqrt{5}\right) \qquad F\left(0, -\sqrt{5}\right)$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Si el centro de la elipse C(x0,y0) y el eje principal es paralelo a OX, los focos tienen de coordenadas F(x0+c, y0) y F'(x0−c, y0). Y la ecuación de la elipse será:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Al quitar denominadores y desarrollar se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Donde A y B tienen el mismo signo.

Hallar la ecuación de la elipse de foco F(7, 2), de vértice A(9, 2) y de centro C(4, 2).

$a = 9 - 4 = 5 \qquad c = 7 - 4 = 3$

$b = \sqrt{25 - 9} = 4$

$$\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$$

Dada la elipse de ecuación $\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$, hallar su centro, semiejes, vértices y focos.

$a^2 = 36 \qquad a = 6$

$b^2 = 16 \qquad b = 4$

$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \qquad c = 2\sqrt{5}$

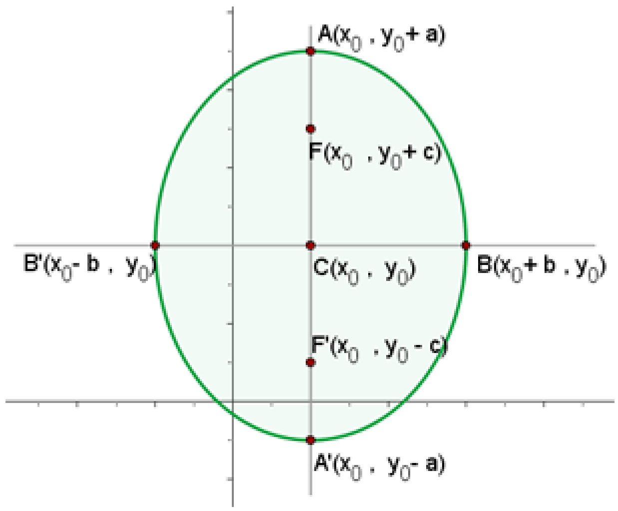
$C(6, -4)$

$A(12, -4) \qquad A'(0, -4)$

$F(6 + 2\sqrt{5}, -4) \qquad F'(6 - 2\sqrt{5}, -4)$

$B(6, 0) \qquad B'(6, -8)$

Si el centro de la elipse C(x0,y0) y el eje principal es paralelo a OY, los focos tienen de coordenadas F(x0, y+c) y F'(x0, y0−c). Y la ecuación de la elipse será:



$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

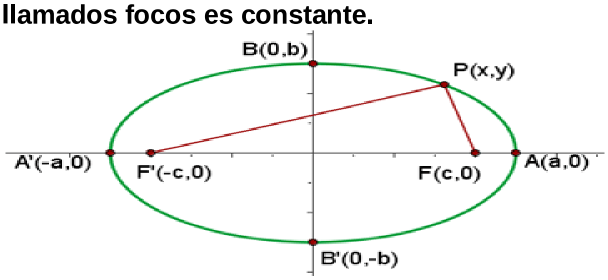
Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde A y B tienen el mismo signo.

Resumen

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



$$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$$

Elementos de la elipse
Focos Son los puntos fijos **F y F'**.
Eje focal Es la recta que pasa por los focos.
Eje secundario Es la mediatriz del segmento FF'.
Centro Es el punto de intersección de los ejes.
Radios vectores Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: **PF** y **PF'**.
Distancia focal Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud **2c**, **c** es el valor de la semidistancia focal.
Vértices Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.
Eje mayor Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud **2a**, **a** es el valor del **semieje mayor**.
Eje menor Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud **2b**, **b** es el valor del **semieje menor**.
Ejes de simetría Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.
Centro de simetría Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

http://www.youtube.com/watch?v=jVTZITljKUE
http://www.youtube.com/watch?v=Hf-Mown3aOE

Bibliografía

http://www.vitutor.com/geo/coni/g_1.html
http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/La_Elipse.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Elipse