Sesión No. 12

PARABOLA

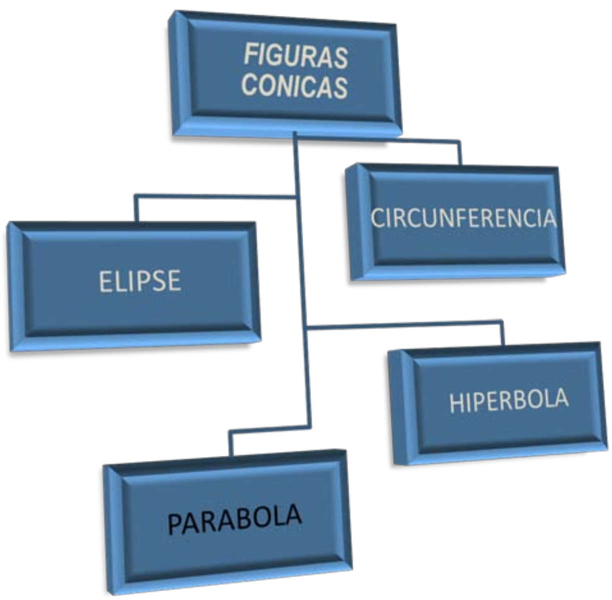
Objetivo

Identificar la ecuación de una parábola, con eje focal paralelo a los ejes coordenados, y reconocer sus características esenciales, en los casos de parábola con vértice fuera del origen y en el origen.

Introducción

Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y también es cortado por otro plano que corte la base del cono en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si adicionalmente el diámetro de la sección es paralelo a un lado del triángulo axial, entonces cualquier línea recta que se dibuje desde la sección de un cono a su diámetro paralelo a la sección común del plano cortante y una de las bases del cono, será igual en cuadrado al rectángulo contenido por la línea recta cortada por ella en el diámetro que inicia del vértice de la sección y por otra línea recta que está en razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección que el cuadrado en la base del triángulo axial tiene al rectángulo contenido por los dos lados restantes del triángulo. Y tal sección será llamada una parábola

Mapa Conceptual



Desarrollo

Sea DD una recta dada del plano y F un punto del plano que no está en la recta dada. Se define la parábola como el lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia al punto F es igual a la distancia a larecta DD.

ii. La recta dada DD se llama DIRECTRIZ y el punto F se llama FOCO (fig. 6.1.1.) Frecuentemente se hace referencia a la parábola de directriz DD y de foco F y se denota por PDD-F.
Esto es:
PDD-F={P:PFF=PD}={P:PF = 1}
PD

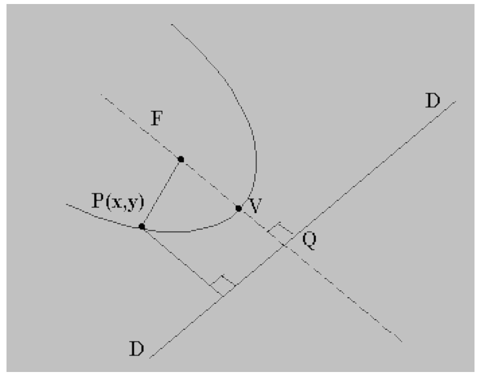


fig. 6.1.1.
Observaciones:

i. Al trazar por F la perpendicular $\overline{QF}$ a la directriz. Se llamará $p = \overline{QF}$: la distancia del foco a la directriz.

ii. Sea V el punto medio del segmento $\overline{QF}$. Como $\overline{VF} = \overline{VQ}$, entonces el punto V pertenece a la parábola. V es llamado VERTICE de la parábola.

El lugar correspondiente a la parábola es simétrico respecto a la recta $\overline{QF}$. En efecto, si P' es el simétrico de P respecto a la recta $\overline{QF}$, entonces PP'' = P''P'. Por lo tanto, el triángulo PP''F es congruente al triángulo P'P''F. De donde P'F = PF y como P'D' = PD, entonces, $\frac{P'F}{P'D'} = \frac{PF}{PD} = 1$, lo cual nos muestra que P' e PDD-F.

6.1.1. Ecuaciones Analíticas de la Parábola

En esta sección sólo se considerarán parábolas con el vértice V en el origen de coordenadas y cuyos focos estarán localizados sobre los ejes x ó y (fig. 6.1.2.)

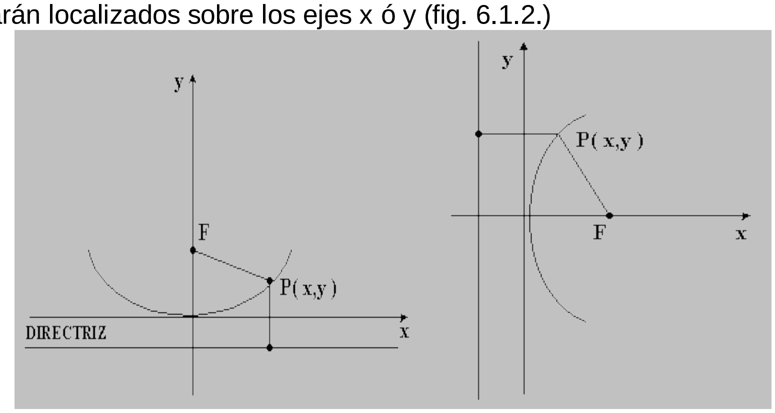


fig. 6.1.2.

Sea P(x, y) un punto de la parábola PDD-F (fig 6.1.2 b)entonces, $\overline{PD} = \overline{PF}$.

Pero, $\overline{PD} = x + \frac{p}{2}$ y $\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Luego, $x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad, y desarrollando los binomios, se obtiene: $x^2+\frac{p^2}{4}+px=x^2+\frac{p^2}{4}-px+y^2$, y simplificando queda finalmente,

$y^2=2px$ (1)

Recíprocamente, sea P(x, y) un punto del plano, cuyas coordenadas (x, y) satisfacen (1) y pruebe que P e PDD-F.

Por hipótesis, $y^2=2px$ (2)

Se debe probar que $\overline{PF}=\overline{PD}$

$$PF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{p^2}{4}-px+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{p^2}{4}-px+2px}=\sqrt{x^2+\frac{p^2}{4}+px}$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}=PD$$

De esta forma se ha demostrado la parte i del siguiente teorema.

TEOREMA 1 (Ecuaciones de la Parábola)

i. La ecuación de la parábola que tiene su foco en F(p/2, 0) y por directriz la recta x = -p/2 (fig. 6.1.4) viene dada por : y2=2px(3). Recíprocamene si un punto P del plano, satisface (3) entonces P ☐ PDD-F

ii. La ecuación de la parábola que tiene su foco en F(0, p/2) y por directriz la recta y = -p/2 (fig. 6.1.3.) es: x2 = 2py (4)

iii. Recíprocamente, si un punto P del plano, satisface (4) entonces P ☐ PDD-F

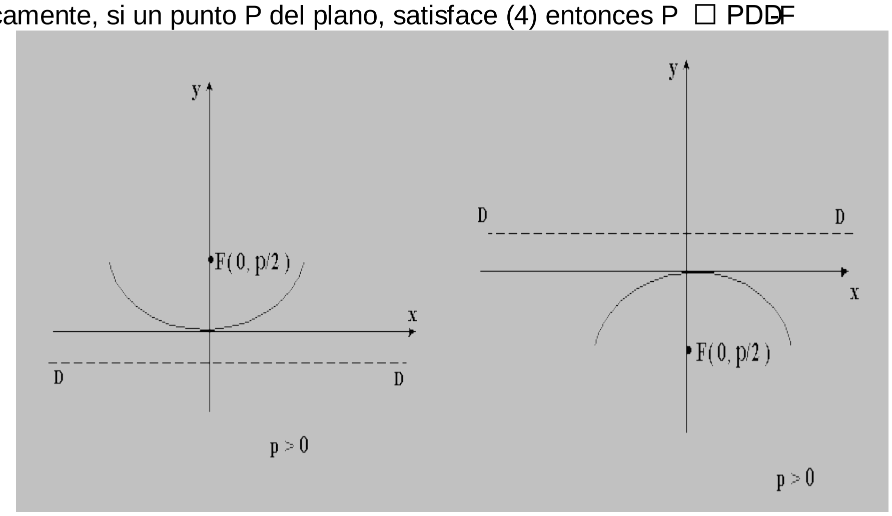


fig. 6.1.3.

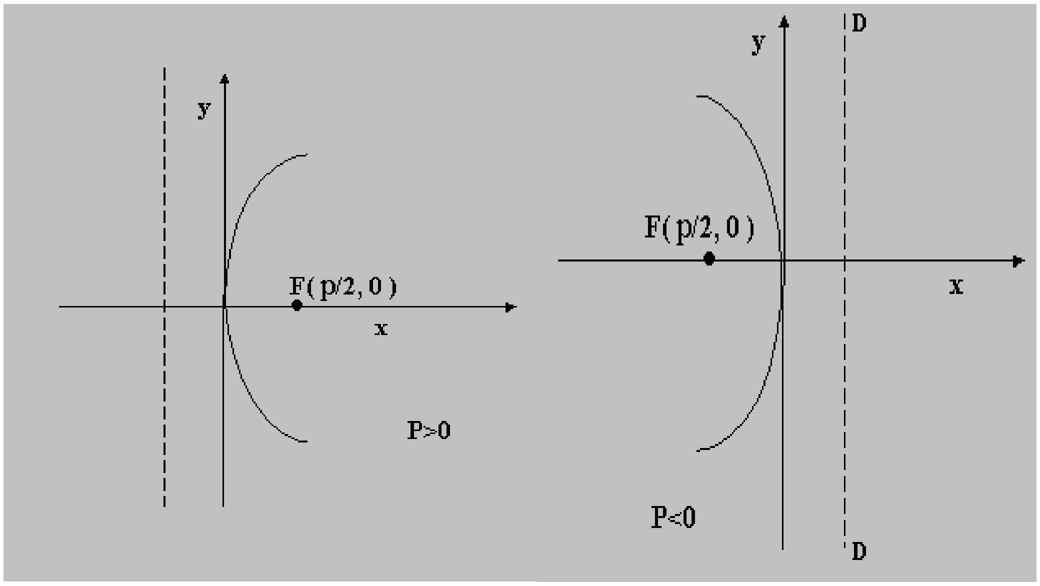


fig. 6.1.4.

Observaciones:
i. En la fig. 6.1.3. aparecen las gráficas de dos parábolas abiertas hacia arriba (en el caso de p>0) y hacia abajo (p<0), respectivamente y cuyos focos están localizados en el punto
F(0, p/2) y cuya directriz es la recta de ecuación y = -p/2.
Además, todos sus puntos son simétricos con respecto al eje y: de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, presentan únicamente a la variable x elevada en una potencia par.
ii. Igualmente, las gráficas de la fig. 6.1.4. corresponden a las gráficas de parábolas abiertas hacia la derecha (p > 0) e izquierda (p < 0) respectivamente, con focos en el punto F(p/2, 0) y cuya directriz es la recta de ecuación x = -p/2. Además todos sus puntos son simétricos con respecto al eje x, de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, poseen únicamente a la variable y elevada a su potencia par.
6.1.2. Traslación de Ejes
En el ejemplo 5 de la sección 5.6., se determinó que la ecuación de la circunferencia con centro en C(4,3) y radio 5 era:
$(x-4)^2+(y-3)^2=25$ ó $x^2+y^2-8x-6y=0$
Sin embargo, si se encuentra la ecuación con centro en C(0, 0) y radio 5. Se obtiene
$x^2+y^2=25$.
De lo anterior se concluye que a veces puede cambiar la ecuación sin cambiar la forma de la gráfica (fig. 6.1.5.).

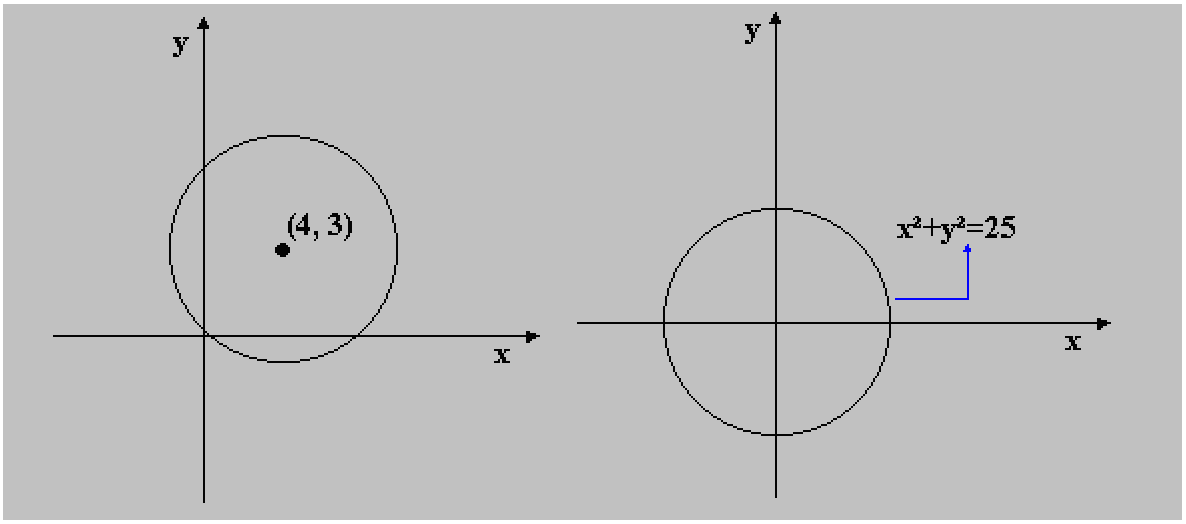
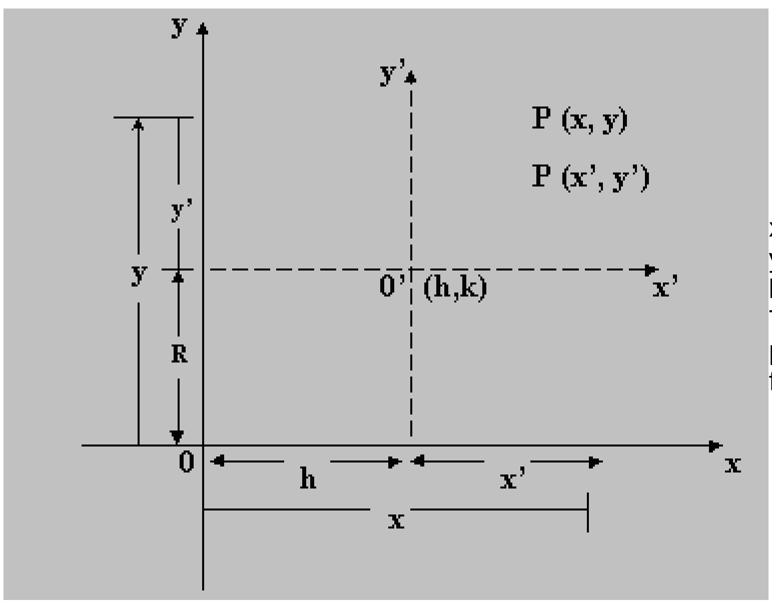


fig. 6.1.5.
Si en el plano cartesiano x - y se eligen nuevos ejes coordenados paralelos a los ejes x e y, se dice entonces que ha habido una "TRASLACIÓN DE EJES". Al fin de analizar los cambios que se presenten en las coordenadas de los puntos del plano al introducir un nuevo sistema de coordenadas x’ e y’ paralelo a los ejes x e y, se toma un punto fijo o’(h, k) que se llama: ORIGEN del nuevo sistema.
Sea ahora, un punto P(x, y) del plano, cuyas coordenadas están referidas al sistema con origen O(O, O) Entonces las coordenadas de P(x’, y’) referidas al sistema x’-y’ vienen dadas por las relaciones:



$x = x' + h$ (1)
$y = y' + k$ (2)
llamadas: ECUACIONES DE TRASLACIÓN DE EJES, y que pueden deducirse fácilmente de la fig. 6.1.6.

fig. 6.1.6.
Observación:
La traslación de ejes modifica la ecuación de una curva y algunas veces la simplifica, pero no altera la forma de la curva.
Una aplicación útil de la traslación de ejes se consigue cuando se obtienen las ecua- ciones generales de la parábola, con vértice en el punto V (h, k) referido al sistema x-y y para las cuales la directriz es perpendicular a uno de los ejes.
Si se toma como referencia los ejes x’ e y’, hallar las ecuaciones de la parábola con vértice en V(h, k), equivale a encontrar las ecuaciones de la parábola con vértice en (0, 0) referido al nuevo sistema.

Las ecuaciones $(y')^2 = 2px'$, $(x')^2 = 2py'$ permiten escribir las ecuaciones en forma general de la parábola, como lo afirma el siguiente teorema:
6.1.3. Teorema2 (Ecuaciones de la parábola. Forma general)
i. La ecuación de la parábola con vértice en el punto V (h, k), que tiene su foco en $F\left[h, k+\frac{p}{2}\right]$ y por directriz la recta:
$y = k - \frac{p}{2}$ (fig. 6.1.7.) viene dada por:
$(x-h)^2 = 2p(y-k)$ (1)

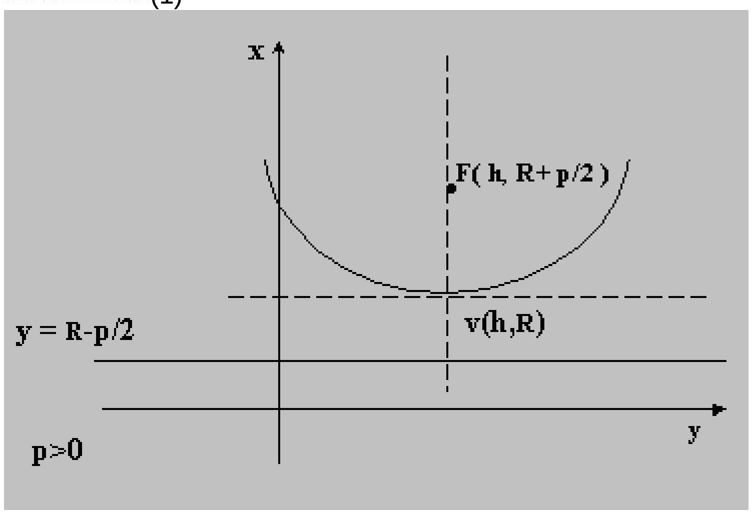


fig. 6.1.7.

ii. La ecuación de la parábola con vértice en el punto V (h, k), que tiene su foco en $F\left[h+\frac{p}{2}, k\right]$ y por directriz la recta:
$x = h - \frac{p}{2}$ (fig. 6.1.8.) viene dada por:
$(y-k)^2 = 2p(x-h)$ (2)

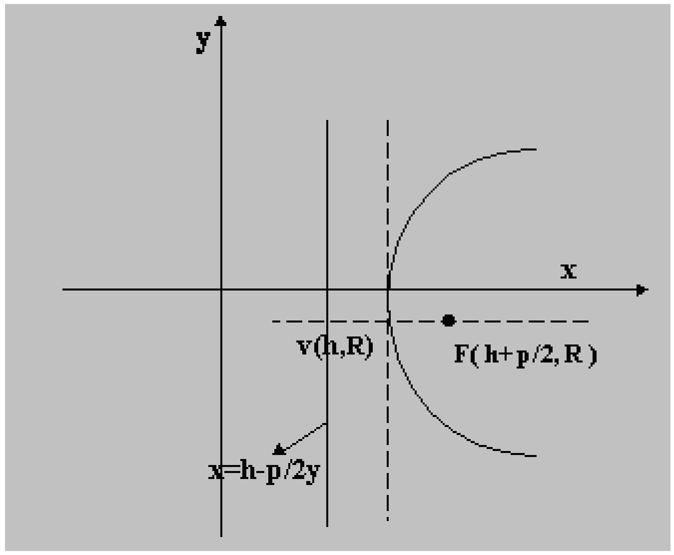


fig. 6.1.8.

Demostración:

Es similar a la del teorema 1, aplicado al sistema x'-y' y luego hacer $x' = x - h$ e $y' = y - k$

Observación:

Las ecuaciones (1) y (2) del teorema 2, después de simplificarlas, pueden expresarse en la forma:

$x^2 - 2hx - 2py + \left(h^2 + 2pk\right) = 0$ (3)

$y^2 - 2ky - 2px + \left(k^2 + 2ph\right) = 0$ (4)

En las ecuaciones (3) y (4) puede notarse que una de las variables aparece al cua- drado y la otra lineal. La parábola siempre se abre en la dirección del eje cuya varia- ble aparece lineal.

Así por ejemplo, la ecuación (3) representa una parábola que se abre hacia el semieje y positivo (si p > 0) o hacia el semieje y negativo (si p < 0). Igualmente, la ecuación (4) representa una parábola abierta hacia la derecha (si p > 0) o hacia la izquierda (si p < 0).

6.1.4. Valores máximos y mínimos de una parábola

Se ha visto en la sección precedente que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ (1) puede escribirse (completando cuadrados) en la forma $(x - h)^2 = 2p(y - k)$ (2) y representa una parábola cuyo eje focal es vertical, abierta hacia arriba (p > 0) ó hacia abajo (p < 0).

Cuando la ecuación aparece en la forma (1), el signo de a (coeficiente de x2), determina si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo y también determina si el vértice es un punto máximo o mínimo de la curva.

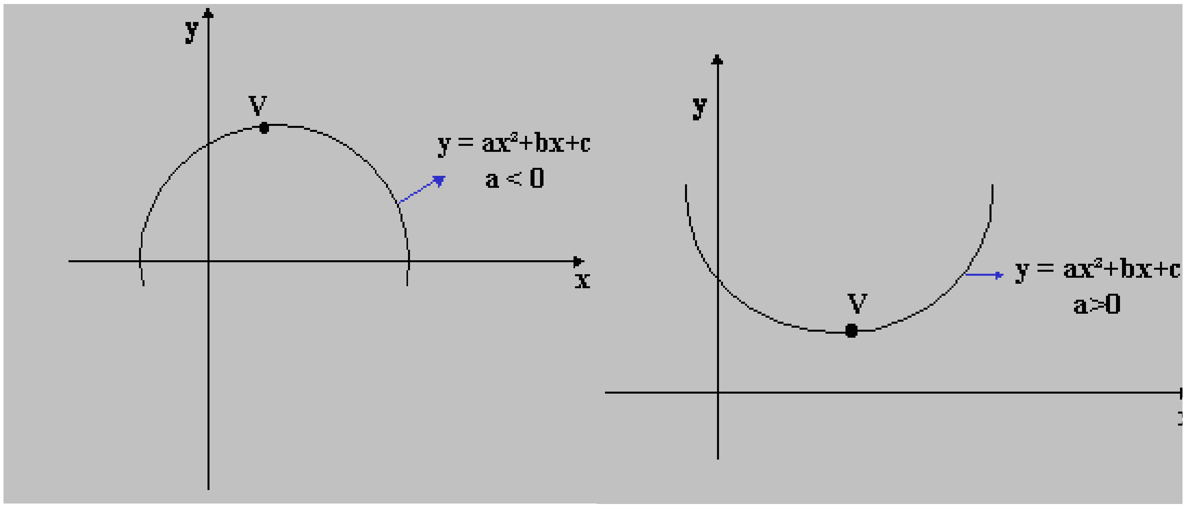


fig. 6.1.9. (a) fig. 6.1.9. (b)

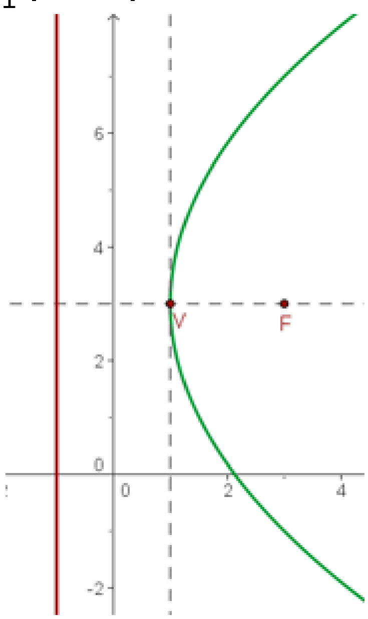
Si como en la fig. 6.1.9.(a), la parábola se abre hacia abajo, el vértice V (punto mas alto de la curva) es llamado el punto máximo de la parábola. El valor de la ordenada correspondiente es el valor máximo de la función que ella representa.

Similarmente, si la parábola se abre hacia arriba (fig. 6.1.9.(b)), el vértice V es llama- do el punto mínimo de la parábola; y el correspondiente valor de y, es el valor mínimo de la función.

Toda función cuadrática, tiene un valor máximo o un valor mínimo, pero no ambos.

Calcular las coordenadas del vértice y de los focos, y las ecuaciones de la directrices de las parábolas:

1 $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$



$(y^2 - 6y + 9) - 9 - 8x + 17 = 0$

$(y^2 - 6y + 9) = 8x - 8$

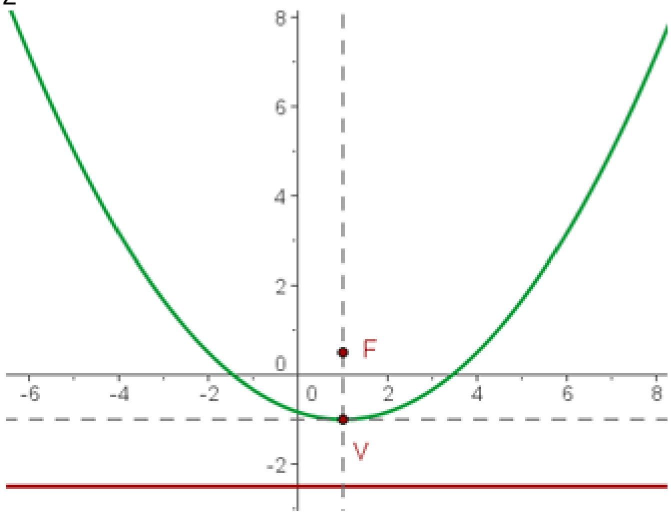
$(y - 3)^2 = 8(x - 1)$ $\qquad$ $V(1, 3)$

$2p = 8$ $\qquad$ $\frac{p}{2} = 2$

$F(1 + 2, 3)$ $\qquad$ $F(3, 3)$

$d \equiv x = 1 - 2$ $\quad$ $d \equiv x = -1$

2 $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$



$(x^2 - 2x + 1) - 1 - 6y - 5 = 0$

$(x^2 - 2x + 1) = 6y - 6$

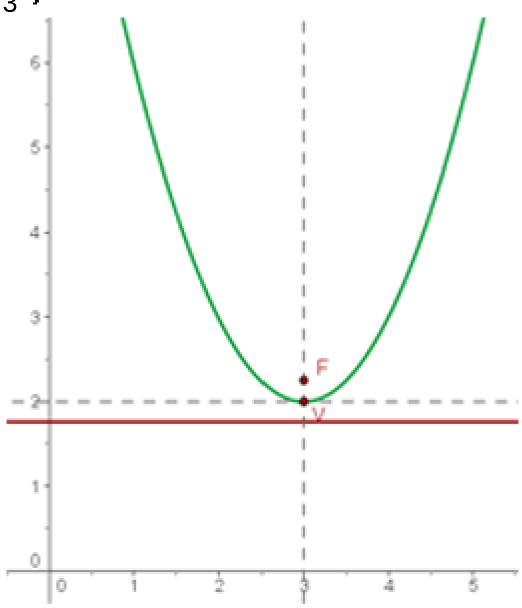
$(x - 1)^2 = 6(y + 1)$ $\quad$ $V(1, -1)$

$2p = 6$ $\quad$ $\frac{p}{2} = \frac{3}{2}$

$F\left(1, -1 + \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ $F\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$d \equiv y = -1 - \frac{3}{2}$ $\quad$ $d \equiv y = -\frac{5}{2}$

3 $y = x^2 - 6x + 11$



$y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 11$

$$(x^2 - 6x + 9) = y - 2$$

$$(x - 3)^2 = 1 \cdot (y - 2) \qquad V(3, 2)$$

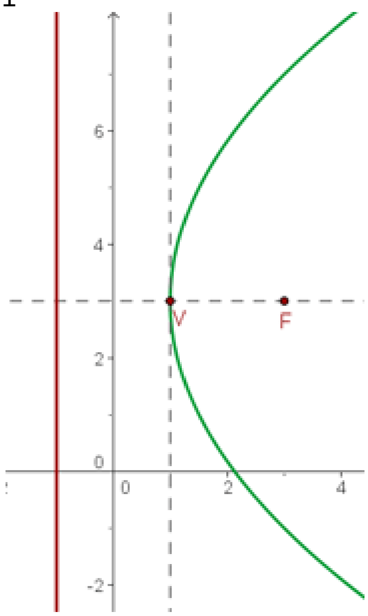
$$2p = 1 \qquad \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$$

$$F\left(3, 2 + \frac{1}{4}\right) \qquad F\left(3, \frac{9}{2}\right)$$

$$d \equiv y = 2 - \frac{1}{4} \qquad d \equiv y = \frac{7}{4}$$

Calcular las coordenadas del vértice y de los focos, y las ecuaciones de la directrices de las parábolas:

1 $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$



$$(y^2 - 6y + 9) - 9 - 8x + 17 = 0$$

$$(y^2 - 6y + 9) = 8x - 8$$

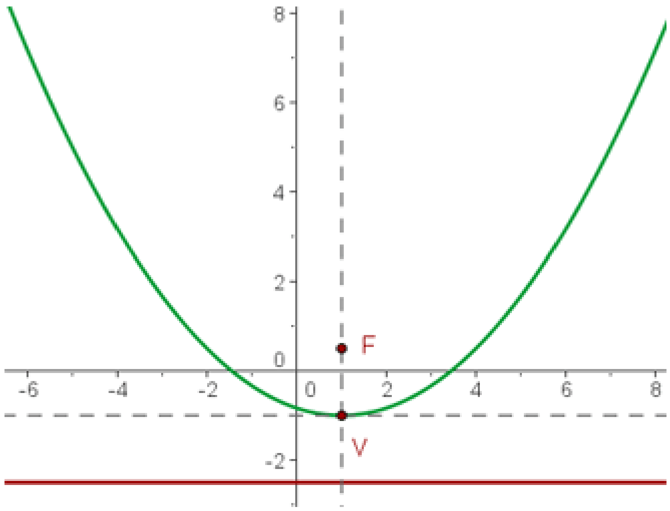
$$(y - 3)^2 = 8(x - 1) \qquad V(1, 3)$$

$$2p = 8 \qquad \frac{p}{2} = 2$$

$$F(1 + 2, 3) \qquad F(3, 3)$$

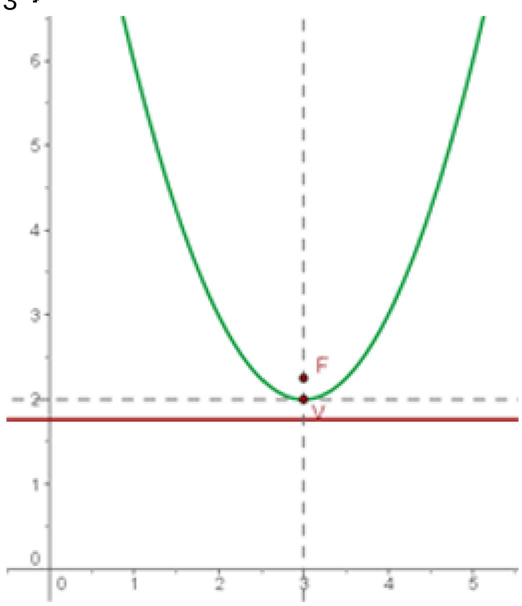
$$d \equiv x = 1 - 2 \qquad d \equiv x = -1$$

2 $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$



$$(x^2-2x+1)-1-6y-5=0$$
$$(x^2-2x+1)=6y-6$$
$$(x-1)^2=6(y+1) \qquad V(1,-1)$$
$$2p=6 \qquad \frac{p}{2}=\frac{3}{2}$$
$$F\left(1,-1+\frac{3}{2}\right) \qquad F\left(1,\frac{1}{2}\right)$$
$$d\equiv y=-1-\frac{3}{2} \qquad d\equiv y=-\frac{5}{2}$$

3 $y=x^2-6x+11$



$$y=(x^2-6x+9)-9+11$$
$$(x^2-6x+9)=y-2$$
$$(x-3)^2=1\cdot(y-2) \qquad V(3,2)$$

$$2p = 1 \qquad \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$$

$$F\left(3, 2 + \frac{1}{4}\right) \qquad F\left(3, \frac{9}{2}\right)$$

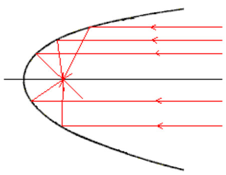
$$d \equiv y = 2 - \frac{1}{4} \qquad d \equiv y = \frac{7}{4}$$

Aplicaciones prácticas

Una consecuencia de gran importancia es que la tangente refleja los rayos paralelos al eje de la parábola en dirección al foco. Las aplicaciones prácticas son muchas: las antenas satelitales y radiotelescopios aprovechan el principio concentrando señales recibidas desde un emisor lejano en un receptor colocado en la posición del foco.

La concentración de la radiación solar en un punto, mediante un reflector parabólico tiene su aplicación en pequeñas cocinas solares y grandes centrales captadoras de energía solar.

Analogamente, una fuente emisora situada en el foco, enviará un haz de rayos paralelos al eje: diversas lámparas y faros tienen espejos con superficies parabólicas reflectantes para poder enviar haces de luz paralelos emanados de una fuente en posición focal. Los rayos convergen o divergen si el emisor se deplaza de la posición focal.



La parábola refleja sobre el foco los rayos paralelos al eje. Analogamente, un emisor situado en el foco, enviará un haz de rayos paralelos al eje.

Los radiotelescopios concentran los haces de señales en un receptor situado en el foco. El mismo principio se aplica en una antena de radar.

Cocina solar de concentrador parabólico. El mismo método se emplea en las grandes centrales captadoras de energía solar.

Los faros de los automóviles envían haces de luz paralelos, si la bombilla se situa en el foco de una superficie parabólica.

Resumen

> La ecuación de una parábola cuyo eje es vertical y su vértice es (u,v) tiene la forma (y-v)=a(x-u)2,

agrupando los términos y reordenando se obtiene una forma equivalente:

> La ecuación de una parábola cuyo eje es vertical es de la forma
> $y = ax^2 + bx + c$.

Si la parábola es horizontal, se obtienen ecuaciones similares pero intercambiando y por x y viceversa. Así tendríamos:

> La ecuación de una parábola cuyo eje es horizontal es de la forma
> $x = ay^2 + by + c$.

La ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y foco en (0,p) es $x^2 = 4py$.

De forma alterna:

La ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y foco en (0,p) es $y = \frac{x^2}{4p}$.

La ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y foco en (0,-p) es $x^2 = -4py$.

La ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y foco en (p,0) es $y^2 = 4px$,

La ecuación de una parábola con vértice en (h, k) y foco en (h, k+p) es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$,

http://www.youtube.com/watch?v=A7Obz6Fvsoc&feature=autoplay&list=ULekRfsdP87tk&lf=mfu_in_order&playnext=4
http://www.youtube.com/watch?v=iiyzvnOxH3Q&feature=autoplay&list=ULiSTj-oZA1Pk&lf=mfu_in_order&playnext=2
http://www.youtube.com/watch?v=ekRfsdP87tk&feature=autoplay&list=ULiiyzvnOxH3Q&lf=mfu_in_order&playnext=3

Final del formulario

Bibliografía

http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/La_Parabola.html
http://www.chapingo.mx/Prepa/matematicas/archivos_htm/geometria_analitica.htm
http://www.vitutor.com/geo/coni/iActividades.html