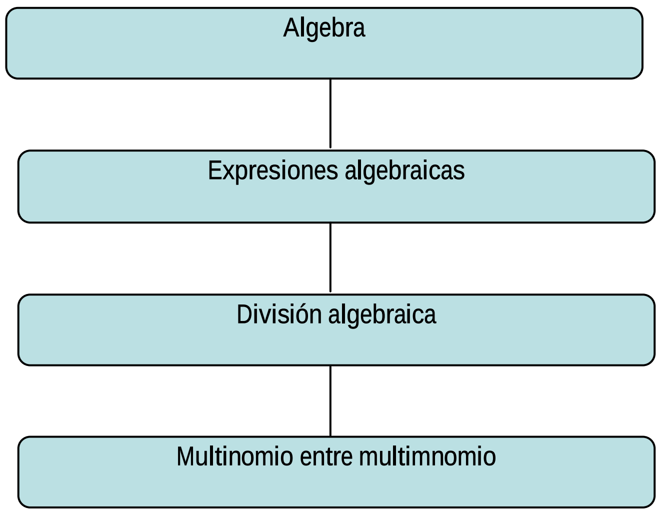
SESIÓN 10
DIVISIÓN ALGEBRAICA (MULTINOMIO ENTRE MULTINOMIO)

Introducción:
La presente sesión consta del procedimiento para dividir un multinomio entre un multinomio.

Objetivo:
El alumno será capaz de aplicar todos los conocimientos de las diferentes operaciones algebraicas para solucionar divisiones de multinomios entre multinomios.

Mapa conceptual:



Desarrollo:

<u>3. División de un Multinomio entre un Multinomio</u>

Pasos para dividir un multinomio entre otro multinomio.

a. Identifique los multinomios dividendo y divisor
b. ordénelos de mayor a menor exponente de acuerdo con una variable determinada.

c. Para obtener el primer término del cociente, divida el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. Escriba el resultado arriba del primer término del dividendo, sobre el signo de división.
d. Mutiplique el cociente obtenido por cada término de divisor. Este producto se resta del dividendo (se cambia de signo). Si hay algún término del dividendo o del producto que no tenga término semejante con quien restar se escriben en el lugar que les corresponde.
e. Para obtener el segundo término del cociente, divida el primer término de la diferencia (del paso anterior) entre el primer término del divisor. Escriba el resultado arriba del segundo término del dividendo, sobre el signo de división.
f. Y así sucesivamente hasta que el exponente del primer término de la diferencia sea menor que el exponente del primer término del divisor.

Ejemplos.

1. Dividir $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$

Solución

a) Identifique el dividendo y el divisor. En este caso, el dividendo es $a^2 + 2a - 3$ y el divisor $a + 3$.

b) Los términos ya están ordenados de mayor a menor exponente.

$$a + 3\overline{)a^2 + 2a - 3}$$

c) Para obtener el primer término del cociente, divida el primer término del dividendo a^2 entre el primer término del divisor a; de donde $\frac{a^2}{a} = a$. Escriba el resultado arriba del primer término del dividendo, sobre el signo de división.

$$\begin{array}{r|l} & a \\ \hline a+3 & a^2+2a-3 \end{array}$$

d) Multiplique el cociente obtenido a por cada término del divisor $a + 3$; así $a(a + 3) = a^2 + 3a$. Reste dicho resultado del dividendo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rl} & a & \\ \hline a+3 & a^2+2a-3 & \\ & \underline{-a^2-3a} & \text{Observe que se cambia el signo} \\ & -a-3 & \text{El término } -3 \text{ simplemente se baja} \end{array}$$

e) Para obtener el segundo término del cociente, divida el primer término de la diferencia (del paso anterior) entre el primer término del divisor, es decir, $\frac{-a}{a} = -1$. Escriba el resultado arriba del segundo término del dividendo, sobre el signo de división.

$$\begin{array}{r|r} & a-1 \\ \hline a+3 & a^2+2a-3 \\ & \underline{-a^2-3a} \\ & -a-3 \end{array}$$

f) Multiplique el cociente obtenido por cada uno de los términos del divisor; de donde: $-1(a + 3) = -a - 3$. Reste dicho resultado del dividendo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rl} & a-1 & \\ \hline a+3 & a^2+2a-3 & \\ & \underline{-a^2-3a} & \\ & -a-3 & \text{Observe que se cambia el signo} \\ & \underline{a+3} & \\ & 0 & \end{array}$$

2. Dividir $4x^3 - 6x^2 + 8$ entre $2x^2 + x - 1$

Solución

a) Identifique el dividendo y el divisor. En este caso, el dividendo es $4x^3 - 6x^2 + 8$ y el divisor $2x^2 + x - 1$.

b) Los términos ya están ordenados de mayor a menor exponente.

$$2x^2 + x - 1 \overline{\big)\, 4x^3 - 6x^2 + 8}$$

c) Para obtener el primer término del cociente, divida el primer término del dividendo $4x^3$ entre el primer término del divisor $2x^2$; de donde $\frac{4x^3}{2x^2}$. El resultado se escribe arriba del primer término del dividendo, sobre el signo de división.

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \cline{2-2} 2x^2 + x - 1 & 4x^3 - 6x^2 + 8 \end{array}$$

d) Multiplique el cociente obtenido $2x$ por cada término del divisor $2x^2 + x - 1$; así $2x(2x^2 + x - 1) = 4x^3 + 2x^2 - 2x$. Reste dicho resultado del dividendo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rl} & 2x & \\ \cline{2-2} 2x^2 + x - 1 & 4x^3 - 6x^2 + 8 & \\ & \underline{-4x^3 - 2x^2 + 2x} & \text{Observe que se cambia el signo} \\ & - 8x^2 + 2x + 8 & \text{El término 8 simplemente se baja} \end{array}$$

e) Para obtener el segundo término del cociente, divida el primer término de la diferencia (del paso anterior) entre el primer término del divisor, es decir, $\frac{-8x^2}{2x^2}$. Escriba el resultado arriba del segundo término del dividendo, sobre el signo de división.

$$\begin{array}{r|r} & 2x - 4 \\ \cline{2-2} 2x^2 + x - 1 & 4x^3 - 6x^2 + 8 \\ & \underline{-4x^3 - 2x^2 + 2x} \\ & - 8x^2 + 2x + 8 \end{array}$$

f) Multiplique el cociente obtenido por cada uno de los términos del divisor; de donde: $-4(2x^2 + x - 1) = -8x^2 - 4x + 4$. Reste dicho resultado del dividendo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rl} & 2x - 4 & \\ \cline{2-2} 2x^2 + x - 1 & 4x^3 - 6x^2 + 8 & \\ & \underline{-4x^3 - 2x^2 + 2x} & \\ & - 8x^2 + 2x + 8 & \\ & + 8x^2 + 4x - 4 & \text{Observe que se cambia el signo} \\ & + 6x + 2 & \text{La división no es exacta porque} \\ & & \text{tiene residuo diferente de cero} \end{array}$$

3. Dividir $5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4$ entre $x + y$

Solución

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y + 5xy^2 + 5y^3 \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \underline{-5x^4 - 5x^3y} \\
 & \qquad 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad \underline{-15x^3y - 15x^2y^2} \\
 & \qquad\qquad 5x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{-5x^2y^2 - 5xy^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad -5xy^3 + 5y^4 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{5xy^3 + 5y^4} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 10y^4
\end{array}
$$

a) Identifique el dividendo y el divisor. En este caso, el dividendo es $5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4$ y el divisor $x + y$.

b) Los términos ya están ordenados de mayor a menor exponente.

$$
x + y \,\overline{\big)\, 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4}
$$

c) Para obtener el primer término del cociente, divida el primer término del dividendo $5x^4$ entre el primer término del divisor x; de donde $\frac{5x^4}{x} = 5x^3$. Escriba el resultado arriba del primer término del dividendo, sobre el signo de división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4
\end{array}
$$

d) Multiplique el cociente obtenido $5x^3$ por cada término del divisor $x + y$; así $5x^3(x + y) = 5x^4 + 5x^3y$. Reste dicho resultado del dividendo de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y + 5xy^2 + 5y^3 \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \underline{-5x^4 - 5x^3y} \\
 & \qquad 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4
\end{array}
$$

Observe que se cambia el signo
Los términos que no intervienen
en la resta simplemente se bajan

e) Para obtener el segundo término del cociente, divida el primer término de la diferencia (del paso anterior) entre el primer término del divisor, es decir, $\frac{15xy}{x} = 15x^2y$. Escriba el resultado arriba del segundo término del dividendo, sobre el signo de división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \underline{-5x^4 - 5x^3y} \\
 & \qquad 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4
\end{array}
$$

f) Multiplique el cociente obtenido por cada uno de los términos del divisor; de donde: $15x^2y(x + y) = 15x^3y + 15x^2y^2$. Reste dicho resultado del dividendo de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \underline{-5x^4 - 5x^3y} \\
 & \qquad 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad \underline{-15x^3y - 15x^2y^2} \\
 & \qquad\qquad 5x^2y^2 + 5y^4
\end{array}
$$

Observe que se cambia el signo. Los términos que no intervienen en la resta simplemente se bajan

g) Para obtener el tercer término del cociente, divida el primer término de la diferencia (del paso anterior) entre el primer término del divisor, es decir, $\frac{15xy}{x} = 15xy^2$. Escriba el resultado arriba del tercer término del dividendo, sobre el signo de división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y + 5xy^2 \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \underline{-5x^4 - 5x^3y} \\
 & \qquad 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad \underline{-15x^3y - 15x^2y^2} \\
 & \qquad\qquad 5x^2y^2 + 5y^4
\end{array}
$$

h) Multiplique el cociente obtenido por cada uno de los términos del divisor; de donde: $5xy^2(x + y) = 5x^2y^2 + 5xy^3$. Reste dicho resultado del dividendo de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y + 5xy^2 \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \underline{-5x^4 - 5x^3y} \\
 & \qquad 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad \underline{-15x^3y - 15x^2y^2} \\
 & \qquad\qquad 5x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{-5x^2y^2 - 5xy^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad -5xy^3 + 5y^4
\end{array}
$$

i) Para obtener el cuarto término del cociente, divida el primer término de la diferencia (del paso anterior) entre el primer término del divisor, es decir, $\frac{-15xy^3}{x} = -15xy^3$. Escriba el resultado arriba del cuarto término del dividendo, sobre el signo de división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y + 5xy^2 - 5y^3 \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \underline{-5x^4 - 5x^3y} \\
 & \qquad 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad \underline{-15x^3y - 15x^2y^2} \\
 & \qquad\qquad 5x^2y^2 + 5y^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{-5x^2y^2 - 5xy^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad -5xy^3 + 5y^4
\end{array}
$$

j) Multiplique el cociente obtenido por cada uno de los términos del divisor; de donde: $-5y^3(x + y) = -5xy^3 - 5y^4$. Dicho resultado se resta del dividendo de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 15x^2y + 5xy^2 + 5y^3 \\
\hline
x + y & 5x^4 + 20x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & -5x^4 - 5x^3y \\
 & 15x^3y + 20x^2y^2 + 5y^4 \\
 & -15x^3y - 15x^2y^2 \\
 & 5x^2y^2 + 5y^4 \\
 & -5x^2y^2 - 5xy^3 \\
 & -5xy^3 + 5y^4 \\
 & 5xy^3 + 5y^4 \\
 & 10y^4
\end{array}
$$

No se continúa dividiendo porque $10y^4$ no se puede dividir por x.
La división es inexacta ya que no tiene residuo cero.

Tarea:

Dividir:

1. $\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2$ entre $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$

2. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^2$ entre $x - \frac{2}{5}y$

3. $m^5 - 5m^4n + 20m^2n^3 - 16mn^4$ entre $m^2 - 2mn - 8n^2$

4. $\frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b - b^3 + \frac{5}{3}ab^2$ entre $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$

5. $x^6 + 6x^3 - 2x^5 - 7x^2 - 4x + 6$ entre $x^4 - 3x^2 + 2$

6. $\frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5} + \frac{19}{30}x$ entre $2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$

8. $\frac{1}{14}x^5 + \frac{139}{280}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{101}{420}x^4y + \frac{5}{12}xy^4$ entre $\frac{2}{7}x^3 - \frac{1}{5}x^2y + \frac{1}{2}xy^2$

10. $\frac{99}{40}m^3n^2 - \frac{101}{60}m^2n^3 + \frac{1}{2}m^5 - \frac{5}{6}m^4n + \frac{7}{6}mn^4 - \frac{5}{8}n^5$ entre $\frac{3}{4}m^3 - \frac{1}{2}m^2n + \frac{2}{5}mn^2 - \frac{1}{4}n^3$

11. Dividir $x^2 + x - 20$ entre $x + 5$.

12. Dividir $a^3 - 3a^2m + 3am^2 - m^3$ entre $a^2 + 2am + m^3$.

13. Dividir $-8a^2 + 12ab - 4b^2$ entre $-a + b$.

14. $x^2 - 2x + \overline{)5x^5 + 12x^2 - 5x}$

15. Dividir $20a^4 - 8a^2 - 10a - 2$ entre $2a - 2$.

Resumen:

En esta sesión el alumno através de ejercicios y ejemplos puede resolver divisiones algebraicas de multinomio o polinomio entre multinomio o polinomio.

Bibliografía:

Summel, F. Matemáticas I: Operaciones algebraicas, Ecuaciones lineales. Pearson educación. Primera ed. México. 2007.

http://www.geolay.com/pagehtm/algeb01.htm

http://www.algebra.com/